

## **ANNEXE 2**

# **MATHEMATIQUES**

*Exercice composé de 5 parties qui peuvent être traitées indépendamment les unes des autres. Chaque partie est notée sur 4 points.*

L'épreuve est constituée de cinq parties, qui peuvent être traitées de façon indépendante.  
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

### PARTIE 1 :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Soit  $\zeta$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  défini par

$$\zeta(e_k) = e_1 \text{ pour } k \neq n+1$$

et

$$\zeta(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n+1}$$

Soit  $T$  la matrice de  $\zeta$  dans la base canonique.

1) Déterminer la matrice  $T$ .

Montrer que  $\text{Im}(\zeta)$  et  $\text{Ker}(\zeta)$  sont supplémentaires

Donner une base de  $\text{Im}(\zeta)$  et de  $\text{Ker}(\zeta)$ .

2) Soit  $\zeta^*$  la restriction de  $\zeta$  à  $\text{Im}(\zeta)$ .

a) Montrer que  $\zeta^*$  est un endomorphisme de  $\text{Im}(\zeta)$ .

b) Soit  $T^*$  la matrice de  $\zeta^*$  dans la base de  $\text{Ker}(\zeta)$  déterminée en 1).

$T^*$  est-elle diagonalisable ?

c)  $T$  est-elle diagonalisable ?

### PARTIE 2 :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  avec  $\alpha > 0$

Soit  $f$  une fonction de  $[0, \alpha]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$f$  est continue,

$f$  est strictement croissante sur  $[0, \alpha]$ ,

$$f(0) = 0,$$

$f$  est dérivable sur  $]0, \alpha[$

et  $\forall x \in ]0, \alpha[, f'(x) > 0$

1) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $g$ .

b) Donner les caractéristiques de  $g$  : intervalle de définition, sens de variation, continuité, dérivabilité,  $g(0)$ .

2) Soit  $h$  la fonction définie par

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(u) du - x f(x)$$

a) Montrer que  $h$  est continue sur  $[0, \alpha]$

b) Montrer que  $h$  est dérivable sur  $]0, \alpha[$  et calculer  $h'(x)$

c) En déduire  $h(x)$

3) A partir d'un raisonnement graphique, trouver directement la valeur de  $h(x)$

**PARTIE 3 :**

Soit  $P$  un polynôme de  $R_n[X]$  et  $Q$  le polynôme de  $R_n[X]$  défini par  $Q(X) = P(X + 1)$

On appelle  $f$  l'endomorphisme de  $R_n[X]$  défini par  $f: P \rightarrow Q$

- 1) a) Quelle est la matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique de  $R_n[X]$  ?
- b) Montrer que  $f$  est bijectif et que  $f^{-1}$  est l'endomorphisme  $g$  de  $R_n[X]$  défini par  $g: P \rightarrow Q$  avec  $Q(X) = P(X - 1)$
- c) Quelle est la matrice  $P$  de  $g$  dans la base canonique de  $R_n[X]$  ?
- d) Soit  $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  et  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$  deux éléments de  $R^{n+1}$  tels que, pour  $p = 0, \dots, n$

$$u_p = \sum_{k=0}^p \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} v_k$$

Montrer que,  $\forall p = 0, \dots, n$

$$v_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} u_k$$

2) Soit  $A$  l'ensemble constitué des éléments  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $B$  l'ensemble constitué des éléments  $b_1, b_2, \dots, b_p$ . On appelle  $S_{n,p}$  l'ensemble des surjections de  $A$  dans  $B$  et  $s_{n,p}$  le cardinal de  $S_{n,p}$ .

a) Montrer que

$$p^n = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} s_{n,k}$$

b) Dédire de ce qui précède que

$$s_{n,p} = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k^n$$

3) Soit  $F$  l'ensemble des applications de  $A$  dans  $B$  et  $F_j$  l'ensemble des applications de  $A$  dans  $B$  telles que  $b_j$  n'ait pas d'antécédent.

- a) On prend  $p = 3$ . Quelle relation lie  $F, F_1, F_2, F_3$  et  $S_{n,3}$  ?
- b) Déterminer alors  $\text{Card } F_1 \cap F_2 \cap F_3$
- c) En déduire  $s_{n,3}$

4) On prend maintenant  $p$  quelconque. Démontrer, en généralisant le résultat de la question 3, le résultat obtenu en 2)b)

## PARTIE 4 :

Soit un marché sur lequel deux biens, un bien 1 et un bien 2, sont échangés entre un vendeur et un acheteur.

### La demande

Les quantités demandées de bien 1 par l'acheteur  $Q_1^d \in \mathbb{R}^+$  sont fonction du prix du bien 1  $P_1 \in \mathbb{R}^+$ , du prix du bien 2  $P_2 \in \mathbb{R}^+$  et du revenu du consommateur  $Y \in \mathbb{R}^+$ . Plus précisément on a **la demande de bien 1 suivante** :

$$Q_1^d = K_1 P_1^{a_{11}} P_2^{a_{12}} Y^{b_1} \quad (a)$$

où  $K_1 > 0, a_{11} < 0, a_{12} > 0, b_1 > 0$  sont des paramètres supposés constants.

Pour les quantités de bien 2,  $Q_2^d \in \mathbb{R}^+$ . Plus précisément on a **la demande de bien 2 suivante** :

$$Q_2^d = K_2 P_1^{a_{21}} P_2^{a_{22}} Y^{b_2} \quad (b)$$

où  $K_2 > 0, a_{22} < 0, a_{21} > 0, b_2 > 0$  sont des paramètres supposés constants.

### L'offre

Les quantités offertes de bien 1  $Q_1^s \in \mathbb{R}^+$  par le vendeur sont fonction du prix du bien 1. On a **l'offre de bien 1 suivante** :

$$Q_1^s = M_1 P_1^{n_1} \quad (c)$$

où  $M_1 > 0, n_1 > 0$  sont des paramètres supposés constants.

Les quantités offertes de bien 2  $Q_2^s \in \mathbb{R}^+$  par le vendeur sont fonction du prix du bien 2. On a **l'offre de bien 2 suivante** :

$$Q_2^s = M_2 P_2^{n_2}$$

où  $M_2 > 0, n_2 > 0$  sont des paramètres supposés constants.

L'objectif est de déterminer quels sont les effets sur les prix lorsque le gouvernement met en place une taxe sur la consommation ou sur la production, par rapport à une situation où il n'y a pas de taxes. On fait l'hypothèse que les paramètres sont tels que les résultats obtenus aient du sens, et plus précisément que les prix seront positifs.

- 1) En supposant que le revenu du consommateur  $Y \in \mathbb{R}^+$  est une donnée exogène, déterminer les prix d'équilibre de chaque bien correspondant à l'égalité entre l'offre et la demande.
- 2) Imaginons que le gouvernement mette en place une taxe proportionnelle sur la consommation de bien 1, taxe notée  $\tau_1^d > 0$ . Cette taxe a pour effet de modifier les quantités demandées de bien 1 et 2, le prix  $P_1$  étant

remplacé par  $(P_1 + \tau_1^d)$  dans (a) et (b). En revanche, la production n'est pas taxée, donc l'offre n'est pas affectée par cette taxe.

Déterminer dans ce cas les nouveaux prix d'équilibre.

Comparer ces prix à ceux déterminés dans 1)

- 3) Imaginons maintenant que le gouvernement mette en place une taxe proportionnelle sur la production de bien 1, taxe notée  $\tau_1^s > 0$ . Cette taxe a pour effet de modifier la quantité offerte de bien 1, le prix  $P_1$  étant remplacé par  $(P_1 + \tau_1^s)$  dans (c). En revanche, la consommation n'est pas taxée, donc la demande n'est pas affectée par cette taxe.

Déterminer dans ce cas les nouveaux prix d'équilibre.

Comparer ces prix à ceux déterminés dans 1)

### PARTIE 5 :

L'objectif de l'exercice est de déterminer l'évolution de deux variables au cours du temps. On admet que le temps est continu.

Soit  $C(t) \in \mathbb{R}^+$  la consommation à la date  $t, t \in [0, +\infty[$ . On cherche à maximiser la fonction  $V$ , qui représente la satisfaction du consommateur en date 0 :

$$V = \int_0^{+\infty} \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \text{ avec } 0 < \theta < 1, \rho > 0 \text{ qui sont des paramètres.}$$

La production à la date  $t$ , notée  $Y(t) \in \mathbb{R}^+$ ,

$$Y(t) = AK(t)^\alpha H(t)^{1-\alpha}$$

où  $A > 0, 0 < \alpha < 1$  des paramètres technologiques, et où  $K(t) \in \mathbb{R}^+$  et  $H(t) \in \mathbb{R}^+$  représentant respectivement le nombre de machines et la valeurs des compétences humaines à la date  $t$ .

L'investissement en machines,  $I_K(t)$  et celui en compétences humaines  $I_H(t)$  prennent la forme suivante :

$$I_K(t) = \frac{dK(t)}{dt} + \delta K(t) \quad \text{où } \delta > 0 \text{ un paramètre.}$$

$$I_H(t) = \frac{dH(t)}{dt} + \delta H(t)$$

L'équilibre sur le marché impose la condition suivante :

$$Y(t) = C(t) + I_K(t) + I_H(t)$$

- 1) Afin de déterminer l'évolution optimale de la consommation au cours du temps, on admet qu'il convient de travailler sur la fonction suivante (que l'on appelle Hamiltonien) :

$$J = \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} + v(t) \frac{dK(t)}{dt} + \mu(t) \frac{dH(t)}{dt} + \omega(t) [Y(t) - C(t) - I_K(t) - I_H(t)]$$

où  $v(t) \in \mathbb{R}, \mu(t) \in \mathbb{R}, \omega(t) \in \mathbb{R}$ .

Sachant que les conditions d'optimalité sont

$$\frac{\partial J}{\partial C(t)} = \frac{\partial J}{\partial I_K(t)} = \frac{\partial J}{\partial I_H(t)} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial K(t)} = -\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\frac{\partial J}{\partial H(t)} = -\frac{d\mu(t)}{dt}$$

Déterminer  $\frac{K(t)}{H(t)}$ .

En déduire la valeur du taux de croissance de la consommation  $\frac{dC(t)/dt}{C(t)}$ .

2) La consommation  $C(0)$  en en  $t=0$  est supposée connue. Déterminer la consommation  $C(t)$

On cherche à ce que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) \neq +\infty$  en  $t = +\infty$  et que le taux de croissance de la consommation soit positif. Déterminer l'intervalle auquel  $\rho + \delta$  doit appartenir pour satisfaire ces deux conditions.

3) Si l'on admet que

$$\frac{dK(t)}{dt} = (B - \delta)K(t) - C(t)$$

où  $B > \delta$  est un paramètre.

On se trouve à l'état stationnaire, c'est-à-dire que le taux de croissance de  $K(t)$ ,  $\frac{dK(t)/dt}{K(t)}$ , est constant. Montrer alors que  $K(t)$  et  $C(t)$  ont le même taux de croissance.

4) Si l'on pose  $\lim_{t \rightarrow +\infty} K(t)e^{-(B-\delta)t} = 0$ , et que l'on a  $K(0) = K_0$  donné, déterminer l'évolution des machines au cours du temps  $K(t)$ . En déduire  $C(0)$ .

