ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE SÉCURITÉ SOCIALE

CONCOURS D'ENTREE 2009

LUNDI 29 JUIN 2009

PREMIERE EPREUVE

COMMUNE AUX DEUX CONCOURS

La durée de l'épreuve est de cinq heures.

Le coefficient est de 5 pour les deux concours.

La note éliminatoire est fixée à moins de 6.

MATHEMATIQUES

SUJET

Exercice composé de 5 parties qui peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

L'épreuve est constituée de cinq parties, qui peuvent être traitées de façon indépendante. Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PARTIE 1

Soit V l'espace vectoriel des fonctions de classe C^{∞} définies sur R.
Pour $n \in N$, on définit l'application φ_n par $\varphi_n(x) = x^n e^{1-x}$
Soit V_k le sous espace vectoriel engendré par $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$

1) Montrer que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est une base de V_k

2) Soit F l'application de V dans V définie par, $\forall \varphi \in V$, $F(\varphi) = \varphi'' + 2\varphi' + \varphi$
Montrer que la restriction F_k de F à V_k est un endomorphisme de V_k

3) Donner la matrice A_k de F_k dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$. A_k est-elle diagonalisable ?

4) Soit $p \in N^*$. Déterminer le rang de A_k^p.

5) Dans quelles conditions a-t-on $\mathrm{Ker}(F_k^p) = \mathrm{Im}(F_k^p)$?

PARTIE 2

Soit la fonction f de R dans R telle que $f(x) = x(1 - x)$
Soit la suite (a_n) telle que : $0 < a_0 < 1$ et $\forall n \in N$, $a_{n+1} = f(a_n)$

1) Montrer que $\forall n \in N$, $0 < a_n < 1/(n+1)$
En déduire la limite de (a_n)

2) Soit la suite (b_n) définie par $\forall n \in N$, $b_n = n\, a_n$
Montrer que (b_n) est une suite croissante. En déduire qu'elle est convergente. Soit B sa limite. Montrer que $B \in]0, 1]$.

3) Soit la suite (c_n) définie par $\forall n \in N$, $c_n = n(b_{n+1} - b_n)$
Montrer que $\forall n \in N$, $c_n = b_n(1 - a_n - b_n)$
En déduire qu'elle est convergente. Déterminer sa limite C

4) On fait l'hypothèse ici que $B \neq 1$
Montrer qu'il existe $n_0 \in N$, tel que $\forall n > n_0$, $b_{n+1} - b_n \geq B(1 - B)/2n$
En déduire que la limite de (b_n) est $+\infty$
Que peut-on conclure sur l'hypothèse faite.

5) En déduire qu'en $+\infty$, $a_n \sim 1/n$

PARTIE 3

1) Soit la fonction φ définie sur R_+ par :

pour $x = 0$, $\varphi(0) = 1$

pour $x > 0$, $\varphi(x) = x / (e^x - 1)$

a. Montrer que φ est de classe C^1 sur R_+

b. Etablir le tableau de variation de φ

c. Etablir le développement limité d'ordre 2 de φ en 0

2) Soit l'équation différentielle

(1) $y' (1 - e^{-x}) + y = e^{-x}$

a. Montrer que φ est une solution de (1) sur R^*_+ puis résoudre l'équation (1) sur R^*_+

b. Montrer qu'il n'existe pas d'autre solution de (1) avec une limite finie en 0

c. φ est-elle aussi une solution de (1) sur R_+ ?

PARTIE 4

Soit un marché du médicament. On admet que la quantité demandée (ou demande) de médicament $Y \in \mathbf{R}^+$ est fonction du prix unitaire $P \in \mathbf{R}^+$: $Y = -\frac{P-a}{b}$ avec $a > 0$ et $b > 0$. En clair, plus le prix unitaire du médicament est élevé, plus la quantité de médicament demandée est faible.
On suppose que l'industrie, qui regroupe de nombreuses entreprises, supporte un coût total de production qui dépend des quantités produites de médicaments. Il y a également un coût fixe $C_F > 0$ c'est-à-dire un coût payé même si l'industrie ne produit rien. Cette fonction de coût est :

$$CT(Y) = cY^2 + C_F \text{ avec } c > 0.$$

1) Les entreprises de cette industrie cherchent à maximiser leur profit (Recette totale moins le cout total). On suppose que le prix est une donnée, l'industrie ne détermine dans ce cas que les quantités optimales à produire pour maximiser leur profit. Déterminer dans ce cas, la relation liant le prix de vente unitaire aux quantités de médicaments produites de sorte à maximiser le profit. On appellera cette relation la fonction d'offre.

2) Déterminer alors la quantité Y_1 et le prix P_1 égalisant l'offre à la demande, ainsi que le profit Π_1 de l'industrie.

3) Supposons désormais qu'une entreprise rachète l'intégralité des autres firmes de sorte que l'industrie devienne un monopole. Le coût total pour cette entreprise ne change pas. Cependant dorénavant, l'entreprise est en mesure de choisir son niveau de prix et la quantité, de sorte à respecter que cette dernière satisfasse la demande qui s'adresse à elle. Elle cherche toujours à maximiser son profit. En d'autres termes, la recette totale intègre la demande.

a. Déterminer la nouvelle quantité d'équilibre Y_2 et prix d'équilibre P_2, ainsi que le profit du monopole Π_2.
b. Comparer le prix et la quantité de médicament vendu en monopole et dans l'industrie.
c. Faire une représentation graphique dans le repère ayant les quantités en abscisses et le prix en ordonnée. Vous mettrez en évidence le profit du monopole. (Indication : il est conseillé de représenter la dérivée du coût total par rapport aux quantités, le coût total moyen $CT(Y)/Y$ ainsi que la dérivée de la recette totale).

4) Supposons enfin que le monopole puisse fabriquer 2 médicaments analogues mais dont l'un est générique. On notera respectivement Y_M et Y_G la quantité de médicament standard et la quantité de médicament générique. Plus précisément :

$$Y_M = -\frac{P_M - a_M}{b_M} \text{ et } Y_G = -\frac{P_G - a_G}{b_G}$$

où P_M désigne le prix unitaire du médicament standard et P_G désigne le prix unitaire du médicament générique. On suppose que la demande de médicament standard est plus forte que celle de médicament générique : $a_M > a_G$ et $b_G > b_M$.
Le coût total est fonction de la quantité produite de médicaments générique et standard, ainsi que d'une capacité maximale de production $\overline{Y}$:

$$CT(Y_M, Y_G, \overline{Y}) = c(Y_M + Y_G) + d\overline{Y} + \frac{e}{\overline{Y} - Y_M}$$

avec $c > 0, d > 0, e > 0$.

d. Déterminer la capacité maximale $\overline{Y}^*$ qui minimise le coût total de production des médicaments pour des valeurs données de Y_M et Y_G.
Considérer alors $\overline{Y} = \overline{Y}^*$.
e. Le monopole cherchant toujours à maximiser son profit, montrer que le prix unitaire des médicaments standards est supérieur à celui des médicaments génériques. En déduire la capacité de production maximale $\overline{Y}^*$.

PARTIE 5

Supposons qu'un agent répartisse son temps total $H \in \mathbf{R}^+$ entre le temps de loisir $L \in \mathbf{R}^+$ et son temps de travail $T \in \mathbf{R}^+$. Supposons par ailleurs que le taux de salaire par unité de temps $w \in \mathbf{R}^+$. L'agent bénéficie également d'un revenu non salarial (transfert versé par l'administration publique) $R \in \mathbf{R}^+$.
L'ensemble de ces revenus permet à l'agent d'acheter un bien de consommation dont la quantité est $C \in \mathbf{R}^+$. Le prix unitaire de ce bien est $P \in \mathbf{R}^+$.
Enfin, on admet que l'agent est capable de mesurer le bien-être que lui procure les quantités consommées de bien et de loisir, selon la relation suivante :

$$U(C,L) = C^{\alpha}L^{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1$$

1) Programme et graphique
a. Déterminer la contrainte budgétaire stipulant que la dépense en consommation est inférieure ou égale aux revenus.
b. Déterminer l'équation d'une courbe de niveau $U(C,L) = \overline{U}$.

c. Si l'on suppose que l'agent cherche à maximiser son bien-être U sous sa contrainte budgétaire, représenter graphiquement l'optimum (L^*, C^*) dans un repère ayant L en abscisse et C en ordonnée.

2) Déterminer les valeurs L^*, C^* et T^* (temps de travail optimal).

3) Supposons que l'inflation apparaisse et conduise à la hausse (infinitésimale) du prix P (on admet donc une variation « très petite » du prix, notée dP). Le gouvernement décide de compenser cette inflation subie par l'agent en augmentant (de façon infinitésimale) le transfert R.
   a. Déterminer la variation nécessaire dR pour permettre à l'agent de conserver le bien-être obtenu en 2).
   b. Montrer alors que la quantité de bien consommée est moindre et la quantité de loisir plus importante (on admet que $w > \alpha$).